ВА Каспарян

Идеали и факторпръстени. Теорема за хомоморфизмите на пръстени

Деф
Непразното ПМ I на пръстен R е идеал, ако:
(i) $(I,+) \leq (R,+)$; (ii) I поглъща левите/десни умн. с елементи $\in R$, т.е. за $\forall x \in I$ и $\forall r \in R$ е в сила $rx, xr \in I$. Идеалите бележим с $I \trianglelefteq R$. Всеки идеал е ПП-н. Следващ пример ще илюстрира ПП-н на ПП-н които не са идеали. Пр
Нека R е пръстен. Тогава декартовият квадрат $R \times R$ е пръстен относно покомпонентно определените събиране $(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1, x_2+y_2)$ и умножение $(x_1,x_2)(y_1,y_2)=(x_1y_1, x_2y_2)$, което е нарича директно произведение на R със себе си. ПМ-то $S=\{(x,y) \in R\times R \mid x=y\}$ (диагонал) е ПП-н на директното произведение, защото $(a,a)-(b,b)=(a-b,a-b) \in S$ $(a,a)(b,b)=(ab,ab) \in S$. Но S не е идеал защото $(a,a)(x,y)=(ax,ay) \notin S$ за $ax \neq ay$ т.е. за $a(x-y) \neq 0$. В частност ако R е област $a \neq 0$ и $x \neq y$ то $(a,a)(x,y) \notin S$. Пр за идеал в $R\times R$ е $I \times J$ за идеали $I, J \trianglelefteq R$ Тогава ако $(x_1,y_1)(x_2,y_2) \in I \times J$ $(\in S) \in R\times R$ то $(x_1,y_1)-(x_2,y_2)=(x_1-x_2, y_1-y_2) \in I \times J$ защото $x_1-x_2 \in (I,+) \leq (R,+)$, $y_1-y_2 \in (J,+) \leq (R,+)$
Освен това $(x_1,y_1)(\in S)=(x_1\varepsilon, y_1 s) \in I \times J$ и

$(\varepsilon s)(x,y) = (\varepsilon x, sy) \in I \times J$ относно
$x, \varepsilon, \varepsilon_1 x, \in I \trianglelefteq R$, $y s, s y \in J \trianglelefteq R$

Деф
Непразното ПМ-во I е десен (ляв) идеал в пръстен R ако $(I,+) \leq (R,+)$ и за $\forall x \in I$ $\forall \varepsilon \in R$ е в сила $x\varepsilon \in I$ (съответно $\varepsilon x \in I$)

Пр

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(F) \;\middle|\; a_{ij} \in F \right\}$$ F-ево поле

е десен идеал. Докажете идеали бележи с $I \trianglelefteq_r R$ а докажете $I \trianglelefteq_e R$

$$J = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & \vdots \\ a_{n1} & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in F \right\} \trianglelefteq_e M_{n\times n}(F)$$

Деф Главен идеал
Ако R е комутативен пръстен с 1-ца и $x \in R$, то мн-вото $\langle x \rangle = \{x\varepsilon / \varepsilon \in R\} \subseteq$ идеал в R който се нарича гл. идеал породен от x. Наистина за $\forall x\varepsilon_1, x\varepsilon_2 \in \langle x \rangle$ и $\forall \varepsilon \in R$ имаме $x\varepsilon_1 - x\varepsilon_2 = x(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \in \langle x \rangle$ и $(x\varepsilon_1)\varepsilon = x(\varepsilon_1 \varepsilon) \in \langle x \rangle$ т. $\varepsilon(x\varepsilon_1) = x(\varepsilon\varepsilon_1) \in \langle x \rangle$

Пр.
$\forall$ идеал в $\mathbb{Z}$ е главен и се поражда от елемент $x \in \mathbb{Z} \geq 0$. Док.
$\forall$ ПГ-на на безкрайната циклична група $(\mathbb{Z},+)$

е от вида $\{0\}=0\mathbb{Z}$ или $n\mathbb{Z}$, $a\in\mathbb{N}$
ПГ-ните $x\mathbb{Z}$ с $x\in\mathbb{Z}\geq 0$ на $(\mathbb{Z},+)$ са
идеали т.к. за $\forall xz\in x\mathbb{Z}$ и $\forall y\in\mathbb{Z}$ е
в сила $(xz)y=x(zy)\in x\mathbb{Z}$ □

Фактор - пръстен

Нека R е пръстен, I е идеал в R
Тогава $(I,+)\trianglelefteq(R,+)$ т.к. $(R,+)$ е абелева
Дефф-та на $(R/I,+)$ определяме умн
$R/I\times R/I\to R/I$, $(a+I)(b+I)=ab+I$,
$a,b\in R$ индуцирано от умн-то в R
Тази операция е коректно зададена
т.е. не зависи от избора на представи
тели на съсредните класове на $(R,+)$
по $(I,+)$. По-точно ако $a+I=a_1+I$
$b+I=b_1+I$ то $a_1-a, b_1-b\in I$
В резултат, $a_1b_1-ab=a_1b_1-ab_1+ab_1-ab=$
$(a_1-a)b_1+a(b_1-b)\in I$ т.к $(a_1-a)b_1, a(b_1-b)\in I\trianglelefteq R$
и $(I,+)\trianglelefteq(R,+)$. За да твърдим че
R/I е пръстен относно индуцираните
от R събиране и умножение, трябва
вече асоциативност от закона за умн
$[(a+I)(b+I)](c+I)=(ab)c+I\overset{\text{асоц в }R}{=}a(bc)+I=$

$(a+I)[(bc+I)=(a+I)[(b+I)(c+I)]$ и
дистрибутивните закони

$[(a+I)+(b+I)](c+I)=(a+b)c+I\overset{\text{дистр в }R}{=}$
$ac+bc+I=(a+I)(c+I)+(b+I)(c+I)$

5,07 9:00 → 12:00
8.07 9:00 → 12:00

Пръстенът R/I се нарича ФП на R по идеала I. Ако R е комутативен то R/I е комутативен защото
$(a+I)(b+I) = ab+I \overset{R \text{ ком}}{=} ba+I = (b+I)(a+I)$

Ако 1_R е единица на R, то в R/I тази единица 1_R+I, защото $(1_R+I)(a+I) = 1_R a + I = a+I = a 1_R + I = (a+I)(1_R+I)$
Ако $[(R,+):(I,+)] < \infty$ то ФП - R/I е краен

Деф
Хомоморфизъм на пръстени е изображение $\ell : R \to S$ от пръстен R в пръстен S което е съгласувано със събирането и умножението в тези пръстени, т.е. $\ell(a+b) = \ell(a) + \ell(b)$ и $\ell(ab) = \ell(a)\ell(b)$ за $\forall a,b \in R$. Всеки хомоморфизъм на пръстени задава ХМ $\ell : (R,+) \to (S,+)$ на съответните адитивни групи

Деф
Ако $\ell : R \to S$ е ХМ на пръстени то множ-то $\ker \ell = \{c \in R \mid \ell(c) = 0_S\}$ се нарича ядро на ℓ а $\operatorname{Im} \ell = \{\ell(c) \mid c \in R\}$ се нарича образ на ℓ

Ядрото $\ker \ell$ на ХМ-ъм на пръстени $\ell : R \to S$ е идеал в R а образът $\operatorname{Im} \ell$ е ПП-ен на S. Док

По определение ~~Ker~~ ядрото на ХМ-а на пръстени $f: R \to S$ съвпада с ядрото на ХМ-а $f: (R,+) \to (S,+)$ на адитивните групи. Следователно ядрото на f $(\operatorname{Ker} f, +) \leq (R,+)$. За $\forall x \in \operatorname{Ker} f$ и $\forall z \in R$ твърдим че $xz, zx \in \operatorname{Ker} f$ Наистина, $f(xz) = f(x) f(z) = 0_S f(z) = 0_S$. Аналогично $f(zx) = f(z) 0_S = 0_S$ Следователно $\operatorname{Ker} f \trianglelefteq R$ е идеал в R

Образът на ХМ-а на пръстени $f: R \to S$ е множеството на образите $f(z)$ на $z \in R$ под действие на f и съвпада с образа на ХМ-а $f: (R,+) \to (S,+)$ на адитивните групи. Следователно образът на f относно събирането $(\operatorname{Im} f, +) \leq (S,+)$. За $\forall f(z), f(s) \in \operatorname{Im} f$ с $z, s \in R$ имаме $f(z) f(s) = f(zs) \in \operatorname{Im} f$ с $zs \in R$. Оттук $\operatorname{Im} f$ е ПП на S т.е. $\operatorname{Im} f \leq S$. □

Бележка

ХМ-зм на пръстени $f: R \to R_1$ е епиморфизъм ако $\operatorname{Im} f = R_1$. Произволен ХМ-зм на пръстени $f: R \to S$ може да се разглежда като епиморфизъм $f: R \to \operatorname{Im} f$. Доказахме че ядрото на ЕМ-зм на пръстени е идеал в R

В сила е и обратното, т.е. $\forall$-ки идеал $I \trianglelefteq R$ се реализира като ядро на подходящ ЕМ-зм на пръстени на R

Тв. ФП

Нека R е пръстен, $I \trianglelefteq R$, $\pi : R \to R/I$ $\pi(r) = r + I$ за $\forall r \in R$ Тогава $\pi \in EM$ на пръстени с $\ker \pi = I$ Док:

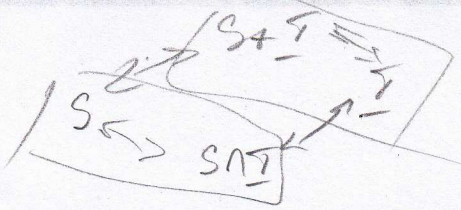
От раздела за групи знаем че $\pi : (R,+) \to (R/I,+) = (R,+)/(I,+)$ е ЕМ-м на адитивните групи с ядро I. Проверяваме $\pi(rs) = rs + I = (r+I)(s+I) = \pi(r)\pi(s)$ за $\forall r,s \in R$ т.е. $\pi : R \to R/I$ е ХМ-м на пръстени с образ R/I съвпадащ с образа на ХМ-а $\pi : (R,+) \to (R/I,+)$. Следователно $\pi \in EM$-м на пръстени с ядро I съвпадащо с ядрото на $\pi : (R,+) \to (R/I,+)$ и I - за ХМ-ните на пръстени

Ако $\ell : R \to S$ е ХМ-м на пръстени то ядрото на ℓ е идеал в R т.е. $\ker \ell \trianglelefteq R$ и ЕМ-ът ~~ℓ от $R/$~~ $\ell : R \to \operatorname{Im}\ell$ се разлага в произведение по следния начин

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\ell} & \operatorname{Im}\ell \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & \nearrow {\scriptstyle \bar{\ell}} & \\ R/\ker\ell & & \end{array}$$

π на естествения ЕМ-м $\pi : R \to R/\ker\ell$, $\pi(r) = r + \ker\ell$ за $\forall r \in R$ и $\bar{\ell}$ ХМ-м на пръстени $\bar{\ell} : R/\ker\ell \to \operatorname{Im}\ell$ Док

Понеже $\ell : (R,+) \to (S,+)$ е ХМ-м на адитивните групи, то Т. за ХМ-ните на групи има разлагане на



ЕМ-на $(R,+) \xrightarrow{f} (T_m f, +)$

$\pi \downarrow \quad \nearrow \bar{f}$

$(R/\ker f, +)$

$f = \bar{f} \pi$ &

произведение на естествения ЕМ-ни $\pi : (R,+) \to (R/\ker f, +)$, $\pi(x) = x + \ker f$ и ИМ-на на адитивните групи $\bar{f}(R/\ker f, +) \to (T_m f, +)$, $\bar{f}(x+\ker f) = f(x)$ за $\forall x \in R$

Оч $\bar{f}((x+\ker f)(s+\ker f)) = \bar{f}(xs + \ker f) = f(xs) \overset{f \in HM}{=} f(x) f(s) = \bar{f}(x+\ker f)\,\bar{f}(s+\ker f) \Rightarrow$

$\bar{f}$ е ХМ-м, а оттам и ИМ-м на предишното Тв. значи $\pi : R \to R/\ker f$ е ЕМ-м на пръстени с ядро $\ker \pi = \ker f$ □

Следствия

1) Нека R е пръстен, S е ПП-н на R и I е идеал в R. Тогава $S+I \leq R$ е ПП-н на R, $I \trianglelefteq S+I$ е идеал, ФП-ята на $S+I/I$ е ПП-н на ФП-ята R/I, $S \cap I \trianglelefteq S$ е идеал в S и $\exists$ ИМ-м на пръстени $S/S\cap I \cong S+I/I$. Наи $S+I = \{s+i \mid s \in S, i \in I\}$ е ПП-н на R, защото $(s_1+i_1)-(s_2+i_2) = (s_1-s_2)+(i_1-i_2) \in S+I$, съгласно $s_1 - s_2 \in (S,+) \leq (R,+)$ и $(i_1-i_2) \in (I,+) \leq (R,+)$. Освен това $(s_1+i_1)(s_2+i_2) = s_1 s_2 + (s_1 i_2 + i_1 s_2 + i_1 i_2) \in S+I$ съгласно $s_1 s_2 \in S \leq R$, $s_1 i_2, s_2 i_1, i_1 i_2 \in I \trianglelefteq R$, $(I,+) \leq (R,+)$, т.е. $s_1 i_2 + s_2 i_1 + i_1 i_2 \in I$

ПМ-вото $I = \{0_R = 0_S\} + I \subseteq S+I$ е идеал защото операциите в $S+I$ са индуцирани от R т.е. $(I,+) \leq (S+I,+)$

и I подредка фактор. умножение с елементи на $S+I$. От $S+I$ ПП-ит на R и $I \triangleleft S \triangleleft R \Rightarrow S+I/I \underset{\text{ПП-н}}{\leq} R/I$ т.е

$S+I/I$ е затворено относно умножение и цуване

Ск Нека R е пръстен, S е ПП $S \leq R$ и е идеал в R, $I \trianglelefteq R$. Знаем че е топава $S+I = \{s+i \mid s \in S, i \in I\} \leq R$, $I \trianglelefteq S+I$, $S+I/I \leq R/I$ Твърдим че $S \cap I \trianglelefteq S$ и $S/S \cap I \cong S+I/I$ Док: Разгл. изображението $\varphi_1 : S \to S+I/I$, $\varphi_1(s) = s+I$ Проверяваме че $\varphi_1 : R \to R/I$ $\varphi_1(r) = r+I$ е ЕМ на пръстени с $\ker \varphi_1 = I$. Оттук ограничението $\varphi_1 : S \to S+I/I$ е хМ на П-ти Образът на $(\varphi_1/S) = S+I/I$, защото $\forall$ елемент на $S+I/I$ е от вида $S+I = \varphi_1(s)$ с $s \in S$. Освен това $\ker(\varphi_1/S) = \{s \in S \mid I = \varphi_1(s) = s+I\} = \{s \in S \mid s \in I\} = S \cap I$ Следователно $S \cap I \trianglelefteq S$ и по т. за хМ-те на пръстени $S/S \cap I = S/\ker \varphi_1 \cong \operatorname{Im}(\varphi_1/S) = S+I/I$ □